

磁性・超伝導

Bardeen-Cooper-Schrieffer理論

2016/12/23

J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer (1957)
量子論による微視的な超伝導の理論(BCS理論)

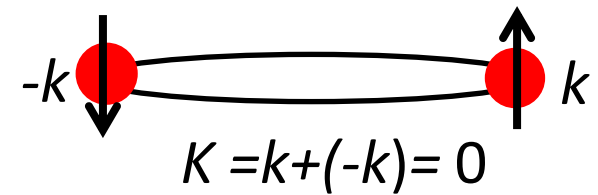
クーパー対(Cooper pair)

電子が対を作る($q = 2e$).

ボーズ粒子としてふるまう.

対の重心運動量は0.

波動関数の軌道の対称性として s, p, d, \dots

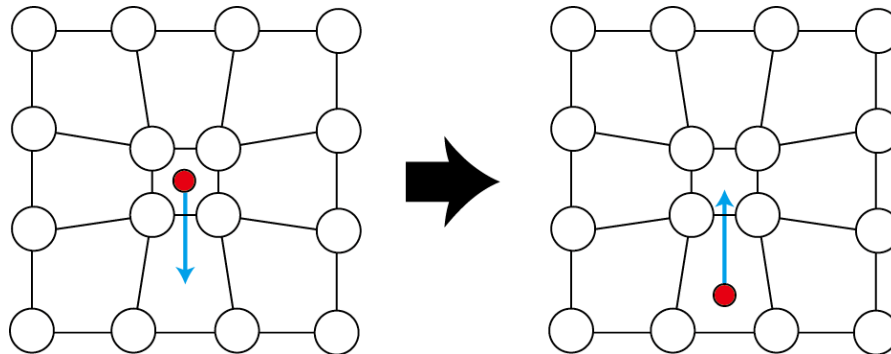
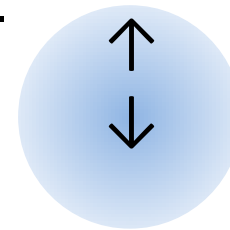


もっとも単純な s 波の場合を考える.

k_{\uparrow} と $-k_{\downarrow}$ の対

$$S = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$$

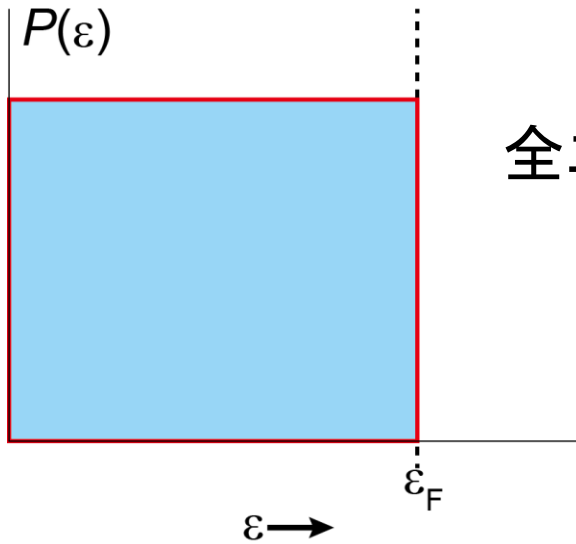
格子ひずみが引力を与える.



J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer (1957)
量子論による微視的な超伝導の理論(BCS理論)

1. 電子間の引力は励起状態と基底状態の間にエネルギーギャップを与える.
2. 電子-格子-電子相互作用は観測される大きさのエネルギーギャップを与える.
3. ロンドンの侵入深さと固有コヒーレンスの長さはBCS理論の自然の結果として出てくる. (=マイスナー効果の導出)
4. $T_c = 1.14\theta \exp(-1/UD(\epsilon_F))$
転移温度 T_c は1方向スピンの状態密度 $D(\epsilon_F)$ と電子-格子-電子相互作用の強さ U をむ.
5. 超伝導リングを通る磁束は量子化される. BCS基底状態は電子対を含み, 対の電荷 $2e$ で表された量子磁束が得られる.

フェルミ気体



運動エネルギー

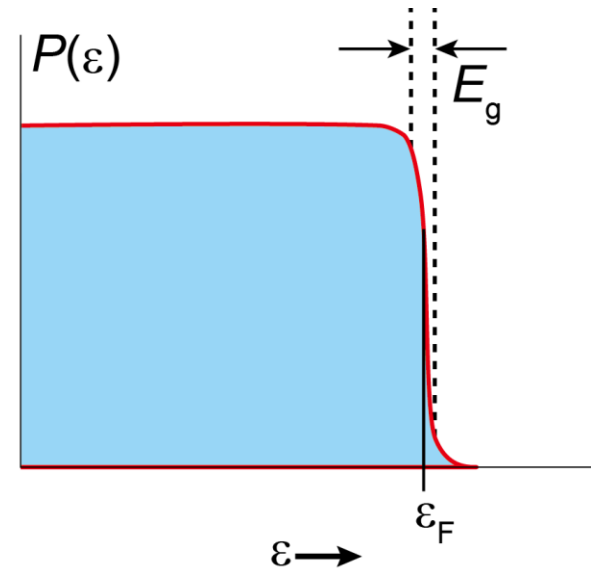
<

全エネルギー

>

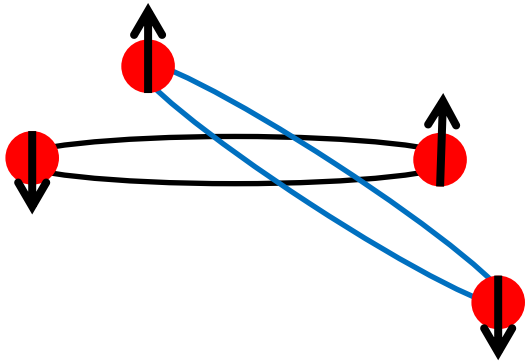
電子間に相互作用はない.
完全に満ちたフェルミの海.

BCS基底状態



電子間に引力相互作用.
最も低い励起状態から E_g 離れる.

1粒子準位が対になって占有される. (クーパー対)



1個のクーパー対の占める
体積に電子は 10^6 個存在

重心運動量 $K = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ とすると $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$

2電子系の波動関数は $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)]$

永年方程式は $(E_{\mathbf{k}} - \varepsilon)g_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} \langle \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{k}' \rangle = 0$

固有値 ε , 相互作用がない場合のエネルギー $E_{\mathbf{k}}$, 2つの電子間の相互作用 H_1

状態の和をエネルギー積分に置き換える.

$$(E - \varepsilon)g_{\mathbf{k}}(E) + \int dE' g_{\mathbf{k}'}(E') H_1(E, E') N(E') = 0$$

$H_1(E, E') = \langle \mathbf{k} | H_1 | \mathbf{k}' \rangle$, スピンの一方向での状態密度 $N(E')$

デバイのフォノン遮断周波数 ω_D を用いて, ϵ_F 以上の $\hbar\omega_D$ の範囲が重要. この範囲内では

$$H_1(E, E') = -V$$

$$N(E') \sim N_F (= \text{フェルミエネルギーでの状態密度})$$

この範囲外では

$$H_1(E, E') = 0$$

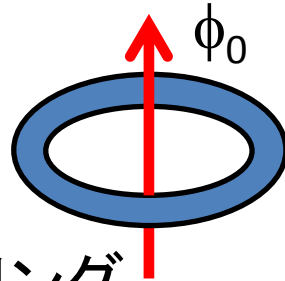
$\epsilon = 2\epsilon_F - \Delta$ とおく. Δ は電子対の結合エネルギーを表す.

$$\Delta = \frac{2\hbar\omega_D}{\exp\left(\frac{1}{N_F V}\right) - 1}$$

V が正 (= 引力) ならば常に $\Delta > 0$. このとき系のエネルギーは電子対をフェルミ準位上に励起することによって小さくなる.

フェルミの海を不安定にする.

超伝導リングの中の磁束の量子化



超伝導体リング

- 磁束が量子化されてとびとびの値をとる.
- リング全体でコヒーレンスの実現している.
- **巨視的な量子現象**の表れ.

量子磁束(flux quantum)

$$\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e} = \frac{hc}{2e} \cong 2.0678 \times 10^{-7} \text{ G} \cdot \text{cm}^2$$

$$\phi_0 \cong 2.0678 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

磁束のこの単位はフラキソイド(fluxoid)またはフラキソン(fluxon)とよばれる.

ボゾン場の例として電磁場を考える.

電場の強さ $E(\mathbf{r})$ は定性的には場の確率振幅の働きをする. フォトンの数が多い時のエネルギー密度は

$$E^*(\mathbf{r})E(\mathbf{r})/4\pi \cong n(\mathbf{r})\hbar\omega$$

ここで $n(\mathbf{r})$ は周波数 ω のフォトンの数密度. よって半古典近似で

$$E(\mathbf{r}) \cong \sqrt{4\pi\hbar\omega n(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad E^*(\mathbf{r}) \cong \sqrt{4\pi\hbar\omega n(\mathbf{r})}e^{-i\theta(\mathbf{r})}$$

$\theta(\mathbf{r})$ は場の位相.

電荷をもったボゾン気体の粒子確率振幅

$$\psi = \sqrt{n}e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad \psi^* = \sqrt{n}e^{-i\theta(\mathbf{r})}$$

粒子の速度はハミルトン方程式から

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{1}{m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$$

粒子流量は

$$\psi^* \mathbf{v} \psi = \frac{n}{m} \left(i\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$$

したがって電流密度は

$$\mathbf{j} = q\psi^* \mathbf{v} \psi = \frac{nq}{m} \left(i\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)$$

両辺のrotを取って

$$\text{rot } \mathbf{j} = \frac{nq}{m} \left(i\hbar \nabla \times \nabla \theta - \frac{q}{c} \text{rot } \mathbf{A} \right) = -\frac{nq^2}{mc} \mathbf{B}$$

ロンドン方程式が得られる。

表面から十分に離れた閉じた経路 C を考える.

十分に超伝導体内部ならば B, j ともに0.

$$j = q\psi^* \boldsymbol{v}\psi = \frac{nq}{m} \left(i\hbar\nabla\theta - \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \right) = 0$$

$$\therefore \hbar\nabla\theta = \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$$

リングを一周した時の位相の変化は

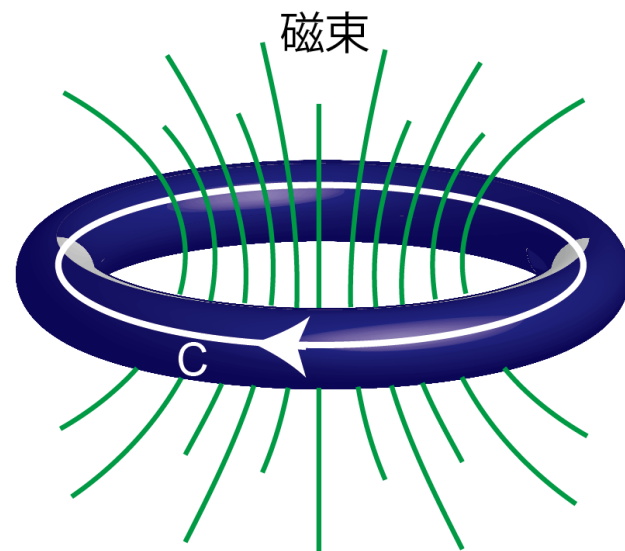
$$\oint_C \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{l} = \theta_2 - \theta_1$$

1周した時に位相がそろわなければならないので整数 s を用いて

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi s$$

ストークスの定理より磁束を Φ として

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_C (\text{rot } \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\delta} = \int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\delta} = \Phi$$



マイスナー状態では $A = \frac{\hbar c \nabla \theta}{q}$

両辺を積分すると

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar c}{q} \oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}$$

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{q} s \quad \text{磁束の量子化}$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e} = \frac{hc}{2e} \quad \text{磁束量子}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{sc}}$$



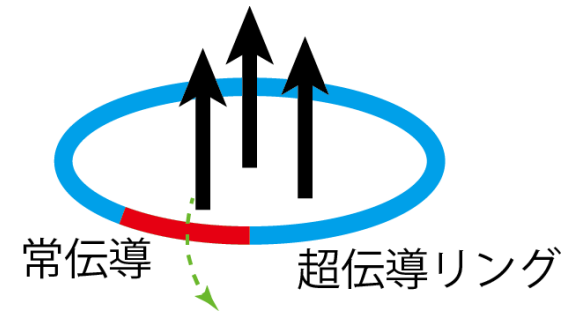
超伝導電流からの磁束

外部からの磁束

永久電流の持続

第1種超伝導体のリングは整数個の量子磁束を保持する.

熱ゆらぎにより超伝導リングの一部が常伝導にならない限り量子磁束は脱出できない.



1つの量子磁束が漏れる単位時間あたりの確率 P は

$$P = \text{試行頻度} \times \text{活性化障害因子}$$

活性化障害因子: $\exp(-\Delta F/k_B T)$

活性化エネルギー: $\Delta F \approx R\xi^2 H_c^2 / 8\pi$

リングの太さ 10^{-4} cm, コヒーレンス長 10^{-4} cm, $H_c = 10^3$ G

$\Rightarrow \Delta F \sim 10^{-7}$ erg

$$\exp\left(-\frac{\Delta F}{k_B T}\right) \approx \exp(-10^8) \approx 10^{-(4.34 \times 10^7)}$$

試行頻度は E_g/\hbar 程度

$E_g = 10^{-15}$ erg とすると

$$E_g/\hbar \approx 10^{-15}/10^{-27} \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

したがって

$$P = \text{試行頻度} \times \text{活性化障害因子} = 10^{12} \times 10^{-4.34 \times 10^7} \text{ s}^{-1} \approx 10^{-4.34 \times 10^7} \text{ s}^{-1}$$



$$\text{逆数 } T = 1/P = 10^{4.34 \times 10^7} > 10^{18}$$

宇宙の年齢

電流は永遠に保持される。

例外： 臨界磁場に近く H_c が低い
第2種超伝導体