

磁性・超伝導

超伝導の現象論②

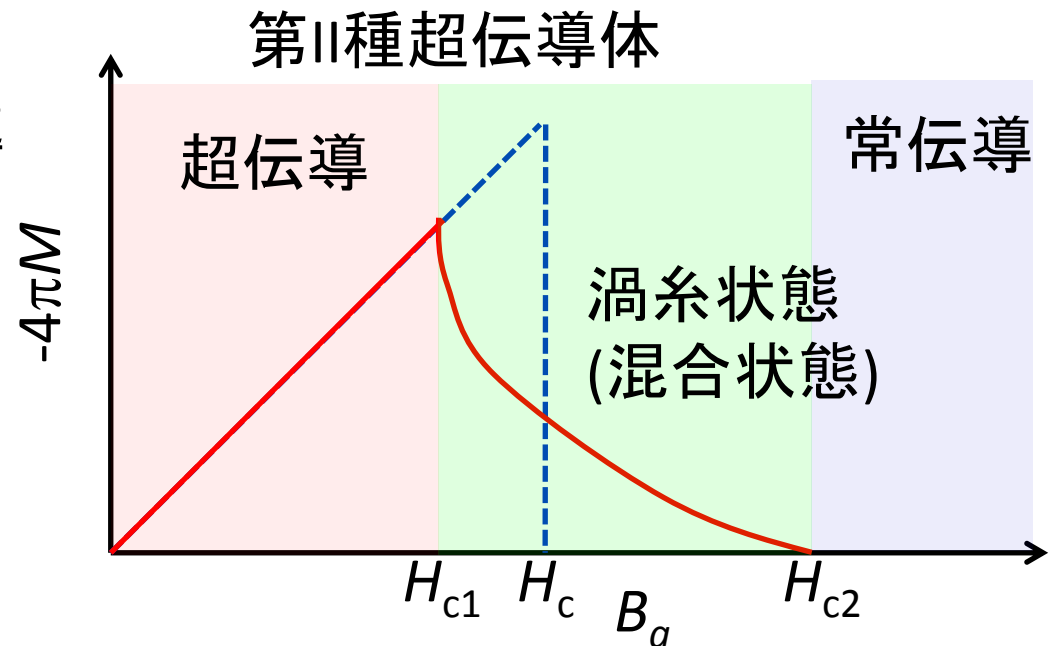
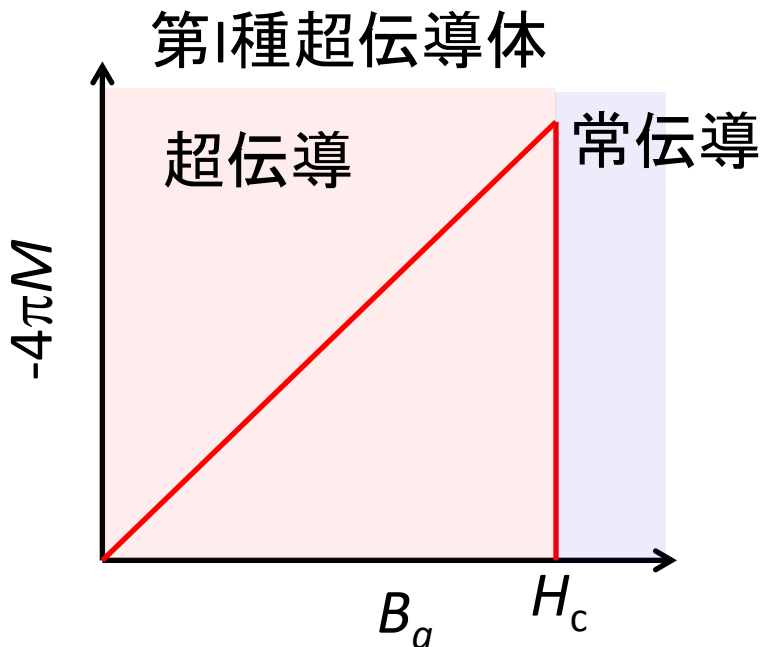
2016/12/16

超伝導転移の熱力学

超伝導 - 常伝導転移は**熱力学的に可逆**

第一種超伝導体の $H_c - T$ 曲線からエントロピーの差の表式を得ることができる。

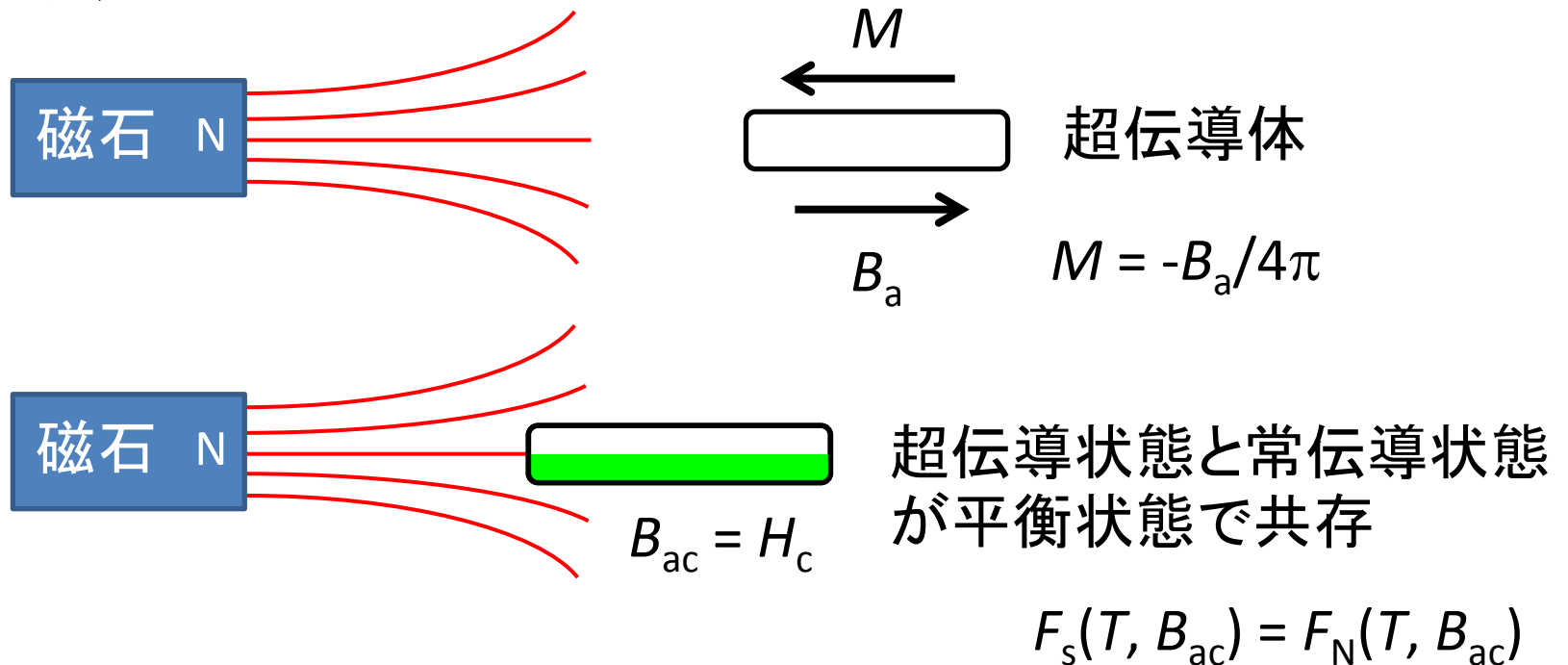
第二種超伝導体の H_c は安定化自由エネルギーに関する**熱力学的臨界磁場**



超伝導状態の安定化自由エネルギー

- 熱測定 : 超伝導状態と常伝導状態($B_a > H_c$)の比熱の差
- 磁気測定: $H_c(T)$

磁気測定



永久磁石が作る磁場の中で無限遠($B_a = 0$)から点 r まで超伝導体を可逆的に運んだときになされた仕事を考える。

永久磁石が作る磁場 B_a の中で無限遠($B_a = 0$)から点 r まで超伝導体を可逆的に運んだときになされた仕事 W

$$W = - \int_0^{B_a} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_a$$

熱力学的恒等式は

$$dF = -\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_a$$

ここで $M = -B_a/4\pi$ を代入

$$dF = \frac{1}{4\pi} B_a \cdot dB_a \quad (\text{cgs-Gauss})$$

$$dF = \frac{1}{\mu_0} B_a \cdot dB_a \quad (\text{SI})$$

自由エネルギー密度の増大

$$\int_{F_S(0)}^{F_S(B_a)} dF = \frac{1}{4\pi} \int_0^{B_a} B_a dB_a$$

$$F_S(B_a) - F_S(0) = B_a^2/8\pi \quad (\text{cgs-Gauss})$$

$$F_S(B_a) - F_S(0) = B_a^2/2\mu_0 \quad (\text{SI})$$

常伝導金属の小さな磁化率は無視する (F_N は磁場に依存しないとする)

$$F_N(B_a) = F_N(0)$$

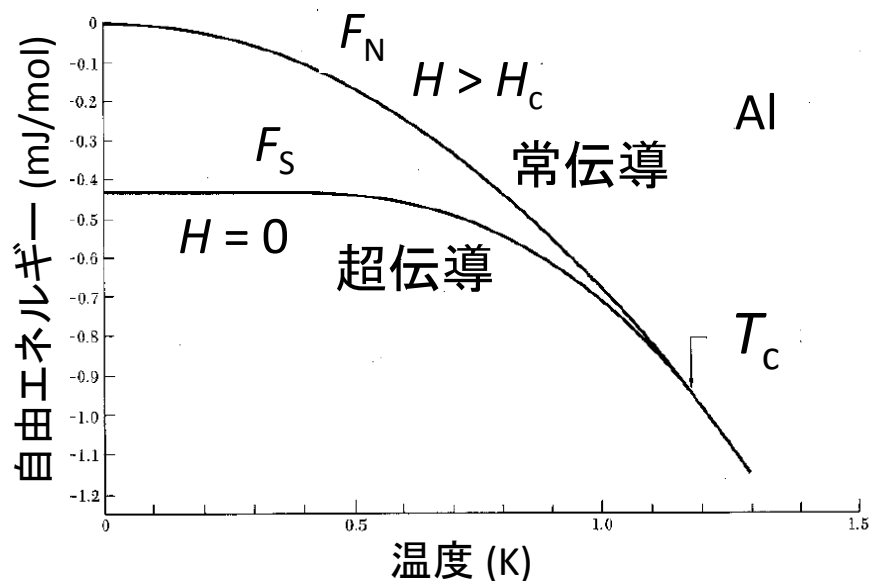
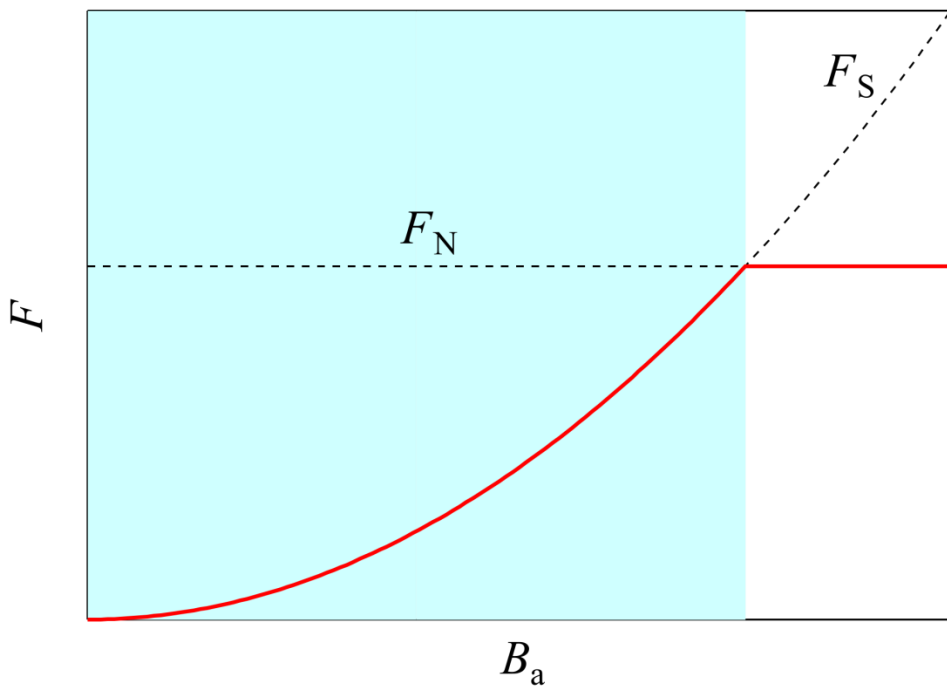
B_{ac} で超伝導状態と常伝導状態のエネルギーは等しい

$$F_N(B_{ac}) = F_N(0) = F_S(B_{ac}) = F_S(0) + B_{ac}^2/8\pi \quad (\text{cgs-Gauss})$$

$$F_N(B_{ac}) = F_N(0) = F_S(B_{ac}) = F_S(0) + B_{ac}^2/2\mu_0 \quad (\text{SI})$$

絶対零度における超伝導の安定化自由エネルギー密度 ΔF

$$\Delta F \equiv F_N(0) - F_S(0) = B_{ac}^2/8\pi$$



C. Kittel 固体物理学入門

超伝導状態と常伝導状態でエネルギーの低い方が実現される

Al : $B_{ac} = 105 \text{ G} \Rightarrow \Delta F = (105)^2/8\pi = 439 \text{ erg/cm}^3 \sim \underline{430 \text{ erg/cm}^3}$
(熱測定による値)

ロンドン方程式

F. W. London and H. London (1935)

局所的な電磁場を取り扱う.

1) 電流密度は局所的なベクトルポテンシャル \mathbf{A} に比例すると仮定

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

2) 比例係数を $-c/4\pi\lambda^2$ とする.

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{A} \quad \text{rot } \mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (\text{cgs-Gauss})$$

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} \mathbf{A} \quad \text{rot } \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (\text{SI})$$

ロンドンゲージ

$\text{div } \mathbf{A} = 0$ かつ外部から電流が供給されていない外面上の点
では $\mathbf{A}_n = 0$

ロンドン方程式によるマイスナー効果の導出

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{cgs-Gauss}) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{SI})$$

第2項を0とし, 両辺のrotをとる.

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{j} \quad (\text{cgs-Gauss}) \quad \text{rot rot } \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} \quad (\text{SI})$$

これをロンドン方程式に代入すると

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (\text{cgs-Gauss}) \quad \text{rot } \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (\text{SI})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2}$$

を得る. $\mathbf{B}(r) = \text{一定かつ} \mathbf{B}(r) \neq 0$ は解としてあり得ない.

→ 超伝導体内部には一様磁場は存在しない.

微分方程式 $\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2}$ を解くと

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right).$$

ここで $\mathbf{B}(r)$ は超伝導体内部での、 $\mathbf{B}(0)$ は超伝導体の境界での磁場。磁場は超伝導体内部に入るにつれて指数関数的に減衰する。

λ_L はロンドンの侵入の深さ (London penetration depth) と呼ばれ、磁場の侵入の深さの目安になる。

$\mathbf{B} = 0$ の場合 $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{B} \neq 0$ の場合 $\mathbf{j} \neq 0$.

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi nq^2}} \quad (\text{cgs-Gauss}) \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{\epsilon_0 mc^2}{nq^2}} \quad (\text{SI})$$

m : 超伝導を担う粒子の質量, $2m^*$

q : 超伝導を担う粒子の電荷, $2e$

n : 超伝導電子密度, $\frac{1}{2}n_n$

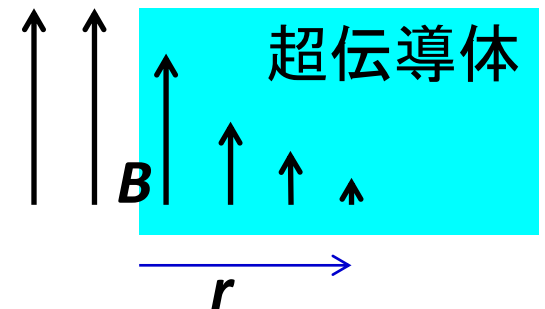


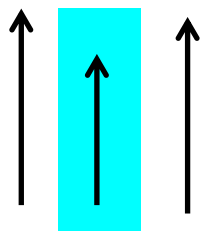
表 5 固有コヒーレンスの長さと同ロンドンの侵入の深さの絶対零度での計算値

金 属	ピンパードの固有 コヒーレンスの長さ ξ_0 (10^{-6} cm)	ロンドンの 侵入の深さ λ_L (10^{-6} cm)	λ_L/ξ_0
Sn	23.	3.4	0.16
Al	160.	1.6	0.010
Pb	8.3	3.7	0.45
Cd	76.	11.0	0.14
Nb	3.8	3.9	1.02

R. Meservey と B. B. Schwartz による。

C. Kittel 固体物理学入門

超伝導薄膜



λ_L よりも十分に薄い超伝導薄膜に磁場を印可した場合、マイスナー効果は不完全となる。誘起される磁場が小さいので、エネルギー密度への磁場の影響は小さく、臨界磁場は非常に高くなる。

コヒーレンスの長さ

Pippardによるロンドン方程式の非局所場一般化

不確定性原理: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$

磁場が空間的に変化していても超伝導電子密度がそれ以下では大幅に変化しない長さの目安があるはず.

コヒーレンスの長さ (coherence length)

電子状態の空間変化による < 超伝導状態の安定化エネルギー
運動エネルギーの増大

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(k+q)x} + e^{ikx}) \quad : \text{変調を受けた波動関数}$$

$$\begin{aligned} \varphi^* \varphi &= \frac{1}{2} (e^{-i(k+q)x} + e^{-ikx}) (e^{i(k+q)x} + e^{ikx}) \\ &= \frac{1}{2} (e^0 + e^0 + \underline{e^{-iqx} + e^{iqx}}) = 1 + \cos qx \end{aligned}$$

オイラーの公式より

$$= \cos(qx) - i \sin(qx) + \cos(qx) + i \sin(qx)$$

運動エネルギーの期待値は

$$\int dx \varphi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi = \frac{\hbar^2}{2^2 m} [(k+q)^2 + k^2]$$

$$\cong \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 + kq) \quad \because q \ll k \text{ によって } q^2 \sim 0$$

$$\psi = e^{ikx} \text{ の運動エネルギーは } \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

よってエネルギーの増加は $\frac{\hbar^2 kq}{2m}$ この増加がエネルギーギャップ E_g

を超えると超伝導は破壊される. 臨界値を q_0 とすると

$$\frac{\hbar^2 k_F q_0}{2m} = E_g \quad \text{で与えられる. ここで } k_F \text{ はフェルミ波数.}$$

固有コヒーレンスの長さ(intrinsic coherence length) ξ_0

$$\xi_0 = \frac{1}{q_0} \quad \text{と定義すると}$$

$$\xi_0 = \frac{\hbar^2 k_F}{2mE_g} = \frac{\hbar v_F}{2E_g}$$

$\therefore v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$ (フェルミ速度 = フェルミ面上での電子の速度)

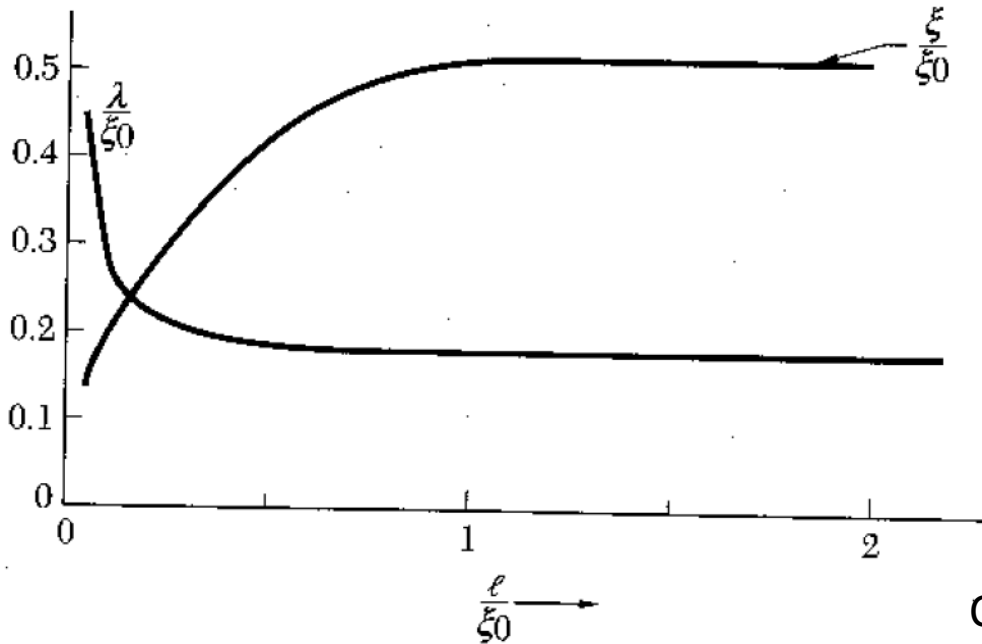
$$\xi_0 = \frac{2\hbar v_F}{\pi E_g} \quad (\text{BCS理論})$$

Ginzburg-Landau理論で最初に登場

常伝導相と超伝導相の間の中間相の構造を記述.
有効的な ξ と λ は電子の平均自由行程 l に依存.

不純な物質，合金の超伝導体

電子の波動関数が揺らいでいるため，電流密度の局所的な変動を作るのにより小さいエネルギーで済む．そのため有効的なコヒーレンス長は短くなる．



C. Kittel 固体物理学入門

Dirty limit

不純物が多い $\xi \approx \sqrt{\xi_0 l}$
 (lが短い) 極限 $\lambda \approx \lambda_L \sqrt{\xi_0 / l}$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \approx \frac{\lambda_L}{l}$$